Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

Semana 12

1. Considere a equação de propagação do calor $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. $(*)$

   (a) Mostre que esta equação possui uma solução estacionária (isto é, que não depende do tempo) da forma $u(x) = Ax + B$.

   (b) Determine a solução estacionária para o problema correspondente a uma barra situada entre os pontos $x = 0$ e $x = L$, em que se fixam as temperaturas $u(0,t) = T_1$, $u(L,t) = T_2$.

   (c) Resolva a equação $(*)$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$ e para as condições iniciais e de fronteira $\begin{cases} u(0,t) = 20 \\ u(1,t) = 60 \\ u(x,0) = 75. \end{cases}$

2. Seja a função f definida no intervalo $(0,\pi)$ por $f(x) = \sin(x)$.

   (a) Determine a série de Fourier de cosenos da função f.

   (b) Diga, justificando, qual o valor da soma da série de Fourier da alínea anterior para cada x no intervalo $[-\pi,\pi]$.

   (c) Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u, \ x \in \,]0,\pi[\\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

3. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 \\ u(0,x) = 0 \ , \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 1 \end{cases}$$

   para $t \geqslant 0$ e para $x \in [0,1]$, (satisfazendo a equação diferencial para $x \in]0,1[$) e onde c é um parâmetro real.

4. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação de Laplace

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,1) = \cos(2\pi x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,y) = \cos(2\pi y) \end{cases}$$

para $x, y \in [0,1]$.

5. a) Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine as soluções para $t \geqslant 0$ e para $x \in [0,\pi]$ de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

(satisfazendo a equação diferencial para $x \in]0,\pi[$).

b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(x,0) = (\pi - x)x \ .$$

6. Seja f a função definida no intervalo $]0,2\pi[$ por $f(x) = x$.

(a) Determine a série de cosenos da função f.

(b) Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - tu, \ x \in (0,2\pi) \\ u_x(0,t) = u_x(2\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

7. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ u(x,0,t) = x \ , \quad u(x,1,t) = x \\ u(0,y,t) = 0 \ , \quad u(1,y,t) = 1 \\ u(x,y,0) = x \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = \cos(2\pi(x-y)) - \cos(2\pi(x+y)) \end{cases}$$

para $x, y \in [0,1]$ e $t \in \mathbb{R}$.